USO DE MODELOS FÍSICOS PARA LA REPRESENTACIÓN ANIMADA DE FENÓMENOS EN AGUAS SOMERAS

Héctor Machuca Balaguera, Juan Camilo Vargas Pino, María Fernanda Chicuasuque y María Isabel Romero Rodríguez
Campus Nueva Granada, km 2 Vía Cajicá – Zipaquirá, Cajicá, Colombia

RESUMEN

Este documento presenta la solución de dos problemas relacionados con la dinámica de ondas en aguas someras. El primer problema corresponde a una sección transversal de aguas poco profundas en las cercanías de una falla geológica que presenta una perturbación debido a la actividad sísmica de la zona, la cual admite la solución de D'Alembert.. El segundo problema se plantea para una guía de onda finita cuyo largo se define en el intervalo $(-L. L)$, con un fondo no constante, dado por una función de la forma $H(x) = \frac{\pi}{2} - arctan\frac{x}{n}$, $n \in Z^{+}$cuya solución refleja el desplazamiento de la superficie libre al aproximarse a la costa.

PALABRAS CLAVE

Aguas Poco Profundas, Propagación de Ondas, Aguas Someras

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre la dinámica de un flujo de agua suelen realizarse bajo diversas condiciones de profundidad y para diferentes tipos de geometrías tanto en el canal que lo contiene como en la topografía ya sea de fondo o bordes, analizando cómo estos factores afectan la propagación de las ondas en la superficie libre. Estos trabajos consideran tanto casos lineales como no lineales (Whitham, 1974; Wiley y Stoker, 1957; Mei, Stiassnie y Yue, 2005; Dean y Dalrymple, 1991; Lamb, 1932; Boussinesq, 1872).

En el presente trabajo consideramos una guía de onda rectangular cuyo largo es mucho mayor que su altura. Se plantean dos problemas para modelar la evolución del levantamiento del agua desde el momento en que la guía de onda es perturbada hasta llegar a la costa. El primer problema corresponde a una guía de onda infinita de fondo constante, que sufre una pequeña perturbación al inicio del movimiento; admitiendo una solución del tipo de D'Alembert, un resultado bien conocido que utilizamos como referencia para evaluar la calidad de la solución obtenida en el segundo problema. El segundo problema se plantea para una guía de onda finita cuyo largo se define en el intervalo $(-kL, L)$, $k \in Z^{+}$con un fondo no constante, de la forma$H(x) = \frac{\pi}{2} - \epsilon\, arctan\frac{x}{n}$, $\epsilon \to 0^{+}$, $n \in Z^{+}$. Para resolverlo, se plantea un esquema basado en diferencias finitas. Aunque este es un caso relativamente sencillo, en el marco del estudio de la propagación de las ondas tsunamis producidas por la actividad sísmica en el fondo del océano, resulta un ejemplo didáctico el cual permite comprender cómo se propagan las ondas bajo esta configuración geométrica, cómo avanzan hacia la derecha e izquierda de la falla y cómo una solución *similar* a la de D'Alembert resulta válida únicamente hasta que la perturbación inicial alcance las fronteras.

2. MARCO DE REFERENCIA

Los estudios acerca de las ondas de agua implican un diálogo constante entre diversos campos de la ciencia y la ingeniería, incluyendo física, matemáticas y oceanografía, entre otros. Las perturbaciones generadas por movimientos como terremotos submarinos, deslizamientos de tierra, explosiones, o el movimiento de una falla geológica, producen ondas transitorias, las cuales cambian a medida que se propagan y se dispersan a lo largo del tiempo y del espacio. Debido a la dispersión, la propagación de las ondas transitorias en el agua es considerablemente más compleja que la de muchos otros tipos de ondas en la naturaleza.

Para resolver los problemas asociados a este tipo de fenómenos, existen diversas técnicas matemáticas que van desde herramientas simples, como la transformada de Fourier, hasta teorías más elaboradas, como la teoría de la perturbación. Asimismo, desde el punto de vista numérico, se han desarrollado métodos cuyo origen y aplicación suelen remontarse a la búsqueda de soluciones para problemas en dinámica de fluidos (Mei, Stiassnie y Yue, 2005; Dean y Dalrymple, 1991).

La transformada de Fourier es una técnica ampliamente conocida y utilizada para comprender el comportamiento espectral de funciones que dependen del tiempo y el espacio. Esta transformación es de gran utilidad para resolver diversas situaciones relacionadas con problemas de ondas, especialmente cuando las condiciones iniciales se definen en dominios infinitos (Ponce, 2018). Al aplicarse al problema de la onda unidimensional, se obtiene la solución de D'Alembert, la cual es particularmente valiosa en medios de propagación infinitos y permite describir fenómenos como la propagación de ondas en cuerdas, en el agua y el sonido, entre otros, sin considerar las condiciones específicas del contorno (Salih, 2019).

Cuando los problemas no pueden resolverse de manera analítica se recurre a los métodos numéricos. Métodos ampliamente usados en las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales son las diferencias finitas y los volúmenes finitos. El método de diferencias finitas suele ser usado en problemas donde los dominios tienen una geometría simple y pueden dividirse en mallas regulares y estructuradas, como son los intervalos en una dimensión o los rectángulos en dos dimensiones (Lopez, Gaspar Y Manzanares, 2006). Su principio se fundamenta en la aproximación de las derivadas mediante diferencias entre los valores de la función en puntos discretos. El método de volúmenes finitos suele ser aplicado en situaciones con dominios de geometrías un poco más irregulares que se aproximan mejor mediante mallas no tan estructuradas como en el caso anterior (Cea, Vázquez y Puertas, 2009). Como se puede observar, dependiendo de las condiciones geométricas del problema y del grado de aproximación requerida, se elige uno u otro método.

El estudio físico-matemático de los tsunamis corresponde a una literatura abundante, buscando mejoras contantes en las simulaciones para avanzar en la predicción de tales eventos y mitigar su impacto. El alcance de este documento es determinar el efecto de las variaciones del parámetro ϵ y de n, sobre el desplazamiento de la superficie libre.

3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y METODOLOGÍA

En esta sección, los problemas planteados nos permiten describir el comportamiento de la superficie del agua sobre dos configuraciones diferentes del lecho marino. La primera considera un fondo constante, mientras que la segunda introduce un fondo de pendiente variable, de modo que en áreas alejadas de la costa la profundidad del agua sea considerablemente mayor que al aproximarse a la playa.

3.1 Problema 1

Resolvemos analíticamente el problema de una sección transversal de aguas poco profundas en las proximidades de una falla geológica, la cual experimenta una perturbación debido a la actividad sísmica de la zona. En esta configuración, la altura de la capa de aguas someras se mantiene constante, lo cual se representa como $\boldsymbol{H(x) = cte}$ (ver Figura 1). La formulación de este problema se encuentra en Selvadurai (2020).

Este es un problema relativamente sencillo, cuya solución se obtiene mediante el uso de la transformada de Fourier, bajo la suposición de que el canal es infinito. La formulación del problema es la siguiente:

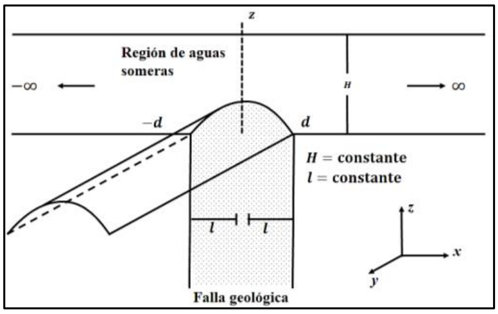

Figura 1. Sección transversal de aguas poco profundas en canal infinito con una perturbación en el fondo

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty \\ u_0 = u\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & si \quad |x| > l \\ a_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) & si \quad |x| < l \end{cases} & \\ u_t\Big|_{t=0} = 0 & \end{array}\right\} \tag{1}$$

Al aplicar la transformada de Fourier $\mathcal{F}[u] = \hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}\, dx$, al sistema (1) se obtiene la ecuación $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -c^2k^2\hat{u}$, cuya solución general es $\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(ckt) + B(k)\sin(ckt)$. Usando la transformada de las condiciones iniciales y la transformada de Fourier inversa, la solución del sistema (1) se expresa como:

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| > l \\ \frac{a_0}{2}\, cos\left(\frac{\pi(x+ct)}{2l}\right) + \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{\pi(x-ct)}{2l}\right) & si \quad |x| < l \end{cases}$$

3.2 Problema 2

Un problema un poco más interesante resulta el considerar una altura de la capa de la región de aguas someras en la forma $H(x) = \frac{\pi}{2} - \ arctan\frac{x}{n}\ \ n = 1,2,3,...$ en un canal de longitud finita $(-L, L)$ ver figura 2.

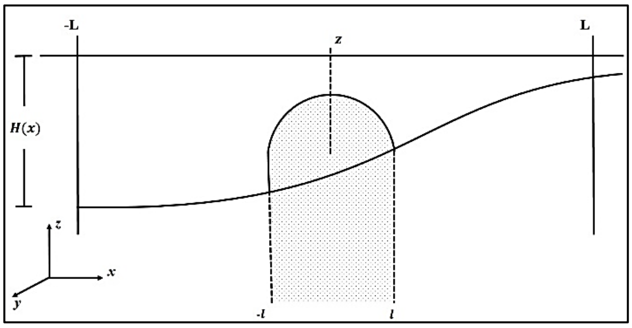

Figura 2. Sección transversal de aguas poco profundas cerca a la playa infinito con una perturbación en el fondo

La formulación del problema es:

$$\begin{cases} u_{tt} = g\dfrac{\partial}{\partial x}\left(H(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ u_0 = u\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & si \quad |x| > l \\ a_0\cos\left(\dfrac{\pi x}{2l}\right) & si \quad |x| < l \end{cases} \\ u_t\Big|_{t=0} = 0 \\ u_x\Big|_{x=\pm L} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Este problema no admite solución analítica por lo que se considerará el uso del método de diferencias finitas que permita aproximarnos a una solución general el sistema planteado.

4. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Desde el punto de vista calculístico algunos problemas en dominios infinitos pueden ser solucionados de manera analítica usando técnicas tradicionales como son la transformada de Fourier, o las funciones de Green. Cuando a estos problemas se les añade ciertas condiciones de fronteras o las condiciones iniciales se dan en forma de cierto tipo de funciones o el fondo ya no es constante, se debe recurrir a los métodos numéricos. Claramente estos cambios geométricos aportan realismo a las simulaciones.

En la figura 3 se observa la solución del problema 1, mostrando la evolución de la onda a izquierda y derecha, lo cual corresponde a justamente la solución de D'Alembert, según la cual la onda va a ir propagándose a izquierda y derecha cada vez con una amplitud menor.

La figura 4 representa la solución numérica del problema 2, para cuando $\epsilon = 0.2, 0.5, 0.75$ y $n = 2{,}3$.

Aquí se observa la evolución de la onda en diferentes tiempos a medidas que se va acercando a la playa, evidenciándose como la onda que viaja a la izquierda se desvanece mientras que la onda que viaja a la derecha a medida que se acerca la onda a la playa va creciendo. Para un mismo valor de ϵ y distintos valores de n son mínimas, las diferencias. A medida que ϵ se aproxima mas a 0, como era de esperarse, la altura de la superficie libre crece más, en comparación cuando el parámetro se aproxima a 1.

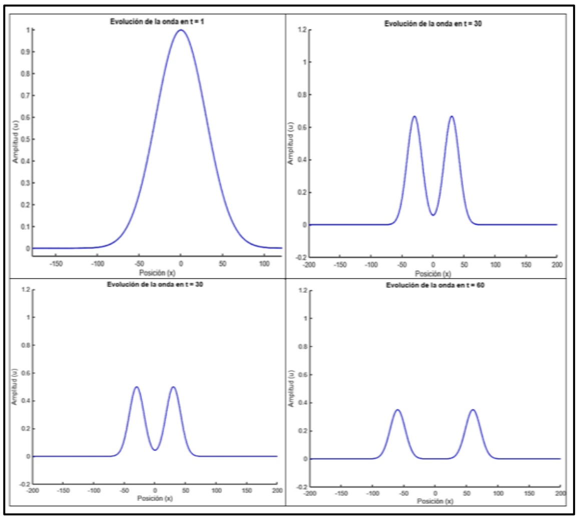

Figura 3. Evolución de la onda a izquierda y derecha

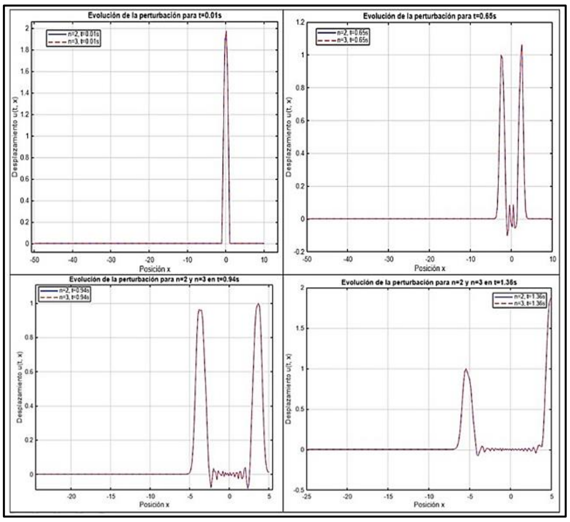

Figura 4. Comportamiento de la onda en diferentes tiempos

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se enmarca en el proyecto INV CIAS 3917, "Animación y simulación de ondas de agua en canales rectangulares con perturbaciones en el fondo", financiado con recursos de la Universidad Militar Nueva Granada, los autores agradecen el apoyo brindado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la UMNG.

REFERENCIAS

Boussinesq, J., (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 17, pp. 55–108.

Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific Publishing, Singapore.

Lamb, H., (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Lopez, M. A., Gaspar, J. and Manzanares, J., (2006). Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo a la simulación del campo electromagnético usando Matlab. *Revista Mexicana de Física E*, Vol. 52, No. 1, pp. 58–64.

Mei, C.C., Stiassnie, M. and Yue, D.K., (2005). *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Part 1: Linear Aspects y Part 2: Nonlinear Aspects*. World Scientific Publishing, Singapore.

Ponce Vanegas, F., (2018). Sobre el problema de restricción de la transformada de Fourier y sus aplicaciones. *Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas*, Bogotá.

Salih, A., (2019). Second-order wave equation. *Department of Aerospace Engineering*, Thiruvananthapuram, pp. 1-24.

Selvadurai, A.P.S. (2000). *Partial Differential Equations in Mechanics 1: Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation.* Springer, Berlin.

Stoker, J.J. (1957). *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers, New York.

Whitham, G.B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves.* John Wiley & Sons, New York.