

# SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE AGUAS SOMERAS EN GUÍAS DE ONDAS RECTANGULARES CON PERTURBACIONES EN EL FONDO

Daniel Francisco Sanabria Bernal y María Isabel Romero Rodríguez  
*Universidad Militar Nueva Granada, Colombia*

## RESUMEN

El presente trabajo aborda la simulación y animación de la propagación de ondas de agua en un canal rectangular bajo el modelo de ecuaciones de aguas someras, con el propósito de simular y animar el comportamiento de la superficie del agua en canales rectangulares en los que la longitud de la guía de onda es mucho mayor que el ancho, considerando la presencia de perturbaciones transversales en el fondo y el efecto Coriolis. Se pretende hacer una aproximación simple al estudio de la presencia de “modos atrapados” previamente estudiados en medios infinitos, al contexto de canales finitos, con aplicaciones tanto en física como en gráficos computacionales para generar simulaciones realistas de fluidos.

## PALABRAS CLAVE

Propagación de Ondas, Aguas Someras, Ondas

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de propagación de ondas son de gran interés en temas de física y matemáticas aplicadas. Muchos de estos trabajos están enfocados en describir el comportamiento de la superficie de agua al considerarse su interacción con obstáculos. Cuando el medio es infinito y homogéneo se hace posible obtener las soluciones exactas utilizando, por ejemplo, transformadas integrales. Sin embargo, en medios no homogéneos, el problema adquiere mayor complejidad. Un resultado bastante bien conocido para los medios infinitos es la aparición de modos atrapados ante la presencia de no homogeneidades. En Romero-Zhevandrov (2010), se obtuvieron las soluciones correspondientes a modos atrapados y resonancias para las ecuaciones de ondas lineales de agua en la aproximación de aguas poco profundas y para la formulación completa para el caso en que la profundidad del líquido está descrita por la multiplicación de un parámetro pequeño  $\epsilon$  y una función de soporte compacto. De los resultados obtenidos, surge la pregunta acerca de cómo se comporta la superficie del agua en un canal rectangular, cuyo largo sea mucho mayor que el ancho, regido por las ecuaciones de aguas someras, ante la presencia de obstáculos en el fondo y al considerar el efecto Coriolis. Algunos textos clásicos como (Gill, 1982), (Mei, et al., 2005), (Whitham, et al., 1999) y (Stoker, 1958), proporcionan un marco teórico sobre fenómenos de propagación de ondas ante la presencia de obstáculos.

El presente trabajo constituye una primera aproximación simple en la búsqueda de la posible existencia de modos atrapados para un canal rectangular finito en los que la longitud del canal sea mucho mayor que su ancho ante la presencia de perturbaciones transversales del fondo. Bajo esta visión, el fondo del canal se modela mediante una función del tipo  $h(x) = h_0 + \epsilon V(x)$ , donde  $\epsilon$  es un parámetro que controla la altura de la perturbación,  $h_0$  es una constante que representa la profundidad media del canal y  $V(x)$  es una función de soporte compacto, lo que permitirá simular y animar el comportamiento de la superficie del agua en este contexto. Basados en las ideas de Clayton (1977) y Gray (1984), se implementa un método eficiente y de bajo costo computacional, aplicando un esquema de diferencias finitas para discretizar el sistema de aguas someras e implementando su simulación usando Python con las librerías de NumPy y Matplotlib.

Considerando que la existencia de los modos atrapados ya ha sido comprobada para medios infinitos, intentar extender esta teoría al contexto de canales finitos podría ser una herramienta valiosa en la modelación de fenómenos naturales que involucren la interacción del agua con perturbaciones del fondo.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El sistema de aguas someras usado se expresa como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\eta + h)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\eta + h)v] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fu + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

En el que  $\eta$  representa la altura de la superficie del agua,  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en la dirección  $x$  y  $y$  respectivamente,  $f$  es el parámetro Coriolis,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $h$  es la profundidad del recipiente.

Las condiciones de frontera son:  $u = 0$  en  $x = 0$  y en  $x = L_x$ ;  $v = 0$  en  $y = 0$  y en  $y = L_y$ . Donde  $L_x$  y  $L_y$  son las paredes en las direcciones de  $x$  y  $y$  respectivamente. Las condiciones iniciales que consideramos son  $\eta(x, y, t) = 0$  para cuando  $t = 0$ ;  $u(x, y, t) = 0$  en  $t = 0$ ;  $v(x, y, t) = 0$  en  $t = 0$ .

## 3. MARCO DE REFERENCIA

La simulación gráfica es un área en desarrollo dentro de la cual la imitación de la superficie del agua en diferentes espacios geométricos es un problema vigente. En la industria gráfica interesa dar mayor naturalidad usando un bajo costo computacional (Gray, 1984; Foster & Fedkiw, 2001). La necesidad de aumentar la naturalidad en las animaciones ha venido generalizando el uso de los resultados de la física, de manera tal que se puedan generar ambientes virtuales que se asemejen más a los ambientes reales.

Existe una amplia variedad de estudios enfocados en diferentes tipos de mallados, en los que la investigación de gráficos por computadoras ha dedicado parte de su interés a animar el movimiento del agua en interacción con diferentes objetos y en diversos tipos de geometrías como se puede observar en trabajos previos (Adabala & Manohar, 2002; Iglesias, 2004; Schreck et al., 2019). En la industria gráfica, compañías como PIXAR, han desarrollado distintas técnicas que permiten representar el comportamiento tanto la superficie del flujo de agua como su comportamiento interno con la finalidad de brindar experiencias visuales de mayor calidad (Schreck et al., 2019; Irving et al., 2006; Gary & Reisch, 2007). La simulación y animación de flujos de agua implica resolver un sistema de ecuaciones físicas, que permitan convertirlas en una representación visual (Cao & Cao, 2021).

En la búsqueda de las soluciones numéricas existen diferentes tipos de técnicas, entre las que se cuenta el método de diferencias finitas. Esta técnica es ampliamente usada debido a su simplicidad y efectividad. Su principio fundamental consiste en usar un mallado que permite relacionar el valor central en cada celda de la variable dependiente con sus valores en los puntos vecinos. Esta técnica aplicada a las ondas de agua facilita la simulación y el análisis de los sistemas ondulatorios en entornos computacionales; por ejemplo, las diferencias finitas centradas permiten utilizar valores en pasos de tiempos pasados y futuros. Dadas estas ventajas, usaremos este tipo de técnicas para resolver el sistema de aguas someras en un canal rectangular.

## 4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Animar y simular numéricamente el comportamiento de un fluido puede llegar a generar un alto costo computacional. Para poder representar el comportamiento de la superficie de agua en un canal rectangular cuyo largo es mucho mayor que el ancho, con una capa superficial delgada, usamos el modelo de ecuaciones de aguas someras. Con este modelo pretendemos simular el comportamiento de la superficie del agua en dos situaciones:

1. Consideramos el comportamiento de la superficie del agua sobre un fondo plano. En la literatura es bien conocido que cuando estamos ante esta situación únicamente se presentan ondas planas. Sin embargo, al llegar al borde del canal aparecen los efectos de reflexión de ondas.
2. Consideramos el comportamiento de la superficie del agua, ante la presencia de una perturbación transversal cilíndrica en el fondo. En este contexto, se determina una primera aproximación al fenómeno de refracción.

Para solucionar estos problemas empleamos el método de diferencias finitas incluyendo la fuerza Coriolis en el modelo, discretizando las ecuaciones de la siguiente manera:

$$H = \eta + h$$

$$H_x = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta x}$$

$$H_y = \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\eta^{n+1} = - \left[ H_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) + u_{i,j} H_x + v_{i,j} H_y \right] \Delta t + \eta^n$$

$$v^{n+1} = - \left[ u_{i,j} \left( \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} \right) + v_{i,j} \left( \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right) - f u_{i,j} + g \left( \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}}{\Delta y} \right) \right] \Delta t + v^n$$

$$u^{n+1} = - \left[ u_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + v_{i,j} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \right) + f u_{i,j} + g \left( \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}}{\Delta x} \right) \right] \Delta t + u^n$$

Este sistema se implementó en código Python, lo que permitió obtener tres secuencias de imágenes, cada una de ellas de 30 segundos de duración.

- (a) La primera secuencia muestra el comportamiento de la superficie del agua sobre un fondo plano.
- (b) La segunda secuencia muestra el comportamiento de la superficie del agua ante la presencia de una perturbación transversal cilíndrica en el fondo.
- (c) La tercera secuencia muestra el comportamiento de la superficie del agua ante la presencia de una perturbación transversal cilíndrica en el fondo y bajo el efecto Coriolis.

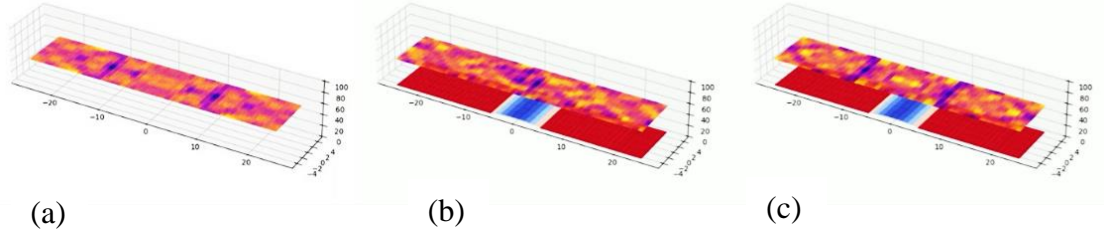


Figura 1. Comparación de la simulación en el frame 213 de: (a) fondo plano, (b) fondo con perturbación cilíndrica y (c) fondo con perturbación cilíndrica y efecto Coriolis, respectivamente

## 5. RESULTADOS:

La discretización de las ecuaciones de aguas someras nos permitió obtener dos secuencias de imágenes de 30 segundos de duración. En la primera secuencia se observa claramente durante aproximadamente los 6 primeros segundos la aparición de ondas planas, en las que en la dirección del canal el frente de onda se conserva durante más tiempo que en la dirección transversal. En el séptimo segundo (frame 213) se observa el fenómeno de reflexión de onda al llegar la onda plana a la pared del canal en la dirección transversal.

La figura 2(a) muestra las ondas planas. En la figura 2(b) se observa como la perturbación en el fondo afecta la propagación de estas ondas, lo que conduce a la aparición más rápida de los fenómenos de reflexión y refracción, lo que justamente, puede estar indicando la aparición de un posible “modo atrapado”. En la figura 2(c), el fenómeno de Coriolis acelera aún más la aparición de estos fenómenos.

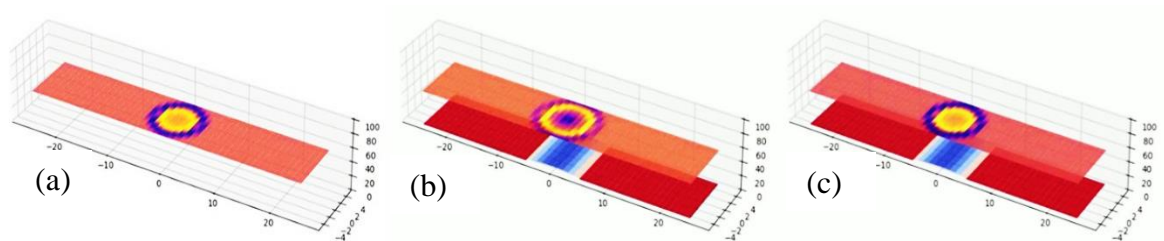


Figura 2. Comparación de la simulación en el frame anterior a la reflexión en la frontera de: (a) fondo plano, (b) fondo con perturbación cilíndrica y (c) fondo con perturbación cilíndrica y efecto Coriolis, respectivamente

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad Militar Nueva Granada INV-CIAS 3751.

## REFERENCIAS

- Adabala, L. & Manohar, S., (2002). “Techniques for Realistic Visualization of Fluids: A Survey,” *Computer Graphics Forum*, vol. 21, pp.65–81.
- Cao, R. & Cao, R., (2021). "Computer Simulation of Water Flow Animation Based on Two-Dimensional Navier-Stokes Equations", *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2021, pp 9. <https://doi.org/10.1155/2021/5157197>
- Clayton, R., & Engquist, B., (1977). Absorbing Boundary Conditions For Acoustic and Elastic Wave Equation. *Bulletin of The Seismological Society of America*, 1529-1540.
- Foster, N., & Fedkiw, R., 2001. Practical animation of liquids. *In Proc. of SIGGRAPH*, 23–30.
- Gary, B. & Reisch, J., (2007). Rat-sized water effects in Ratatouille. In *ACM SIGGRAPH 2007 sketches (SIGGRAPH '07)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 69. <https://doi.org/10.1145/1278780.1278863>
- Gill, A. E. (1982). *Atmosphere-ocean dynamics* (Vol. 30, 1st ed.). Academic Press. ISBN: 978-0-12-283522-3
- Gill, A. E. (1982). *Atmosphere-ocean dynamics* (Vol. 30, 1st ed.). Academic Press. ISBN: 978-0-12-283522-3
- Gray, W., (1984). Comparison of Finite Difference and Finite Element Methods. NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Fluids in Porous Media (págs. 901-952). Martinus Nijhoff.
- Iglesias, A., (2004). “Computer Graphics for Water Modeling and Rendering: A Survey,” *Future Generation Computer Systems*, vol. 20, No. 8, pp. 1355–1374.
- Irving, G. et al., (2006). Efficient simulation of large bodies of water by coupling two and three dimensional techniques. *ACM Trans. Graph.* 25. 805-811. [10.1145/1141911.1141959](https://doi.org/10.1145/1141911.1141959).
- Mei, C. C., Stiassnie, M., & Yue, D. K. P. (2005). *Theory and Applications of Ocean Surface Waves*. World Scientific.
- Romero Rodríguez, M. I., & Zhevandrov, P. (2010). Trapped Modes and Resonances for Water Waves over a Slightly Perturbed Bottom. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 17(3), <sup>(1)</sup> 307–327. Pleiades Publishing, Ltd
- Schreck, C. et al., (2019). Fundamental solutions for water wave animation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38, 1 - 14.
- Stoker, J. J. (1958). *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Whitham, G. B. (1999). *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, Inc.